数理解析研究所講究録
第2067巻 2018年 16-25

STACK によるフィードバック付問題の実践例

日本大学・医学部　谷口　哲也 (Tetsuya Taniguchi)
日本大学・医学部　宇田川　誠一 (Seiichi Udagawa)
Scool of Medicine,
Nihon University
日本大学・生物資源科学部　根本　洋明 (Hiroaki Nemoto)
College of Bioresource Sciences,
Nihon University

1　背景

STACK で数学の問題を受験させるとき, その受験結果が教師によってどのように評価されるかは, 学生にとって気になる点の 1 つである. この解説において, 同じ問題を評価無と評価有に分け, 同時期に公開し, フィードバック付で学生に受験させたときの学習効果について紹介したい.

今回, 日本大学医学部 1 年生の数学 (55 分 $\times$ 15 回) 受講者 132 名に対して, 微分方程式の問題を講義時間外に, Moodle2 と STACK3 を用いて受験させた. ただし, 同じ微分方程式の問題 (授業第 5, 6 回目) を評価無 (練習問題) と評価有 (類題問題) にわけ, 2 節の図 1 のように同時期に公開した. ただし, 問題に現れる係数等はランダムに変化し, 全く同じではない. 評価無を受験し, その後さらに評価有を受験した人を対象に調査した. 3 節のガンマ関数とベータ関数の問題, 4 節のガウスの発散定理の問題についても同様に公開し, 調査した.

2　微分方程式の問題

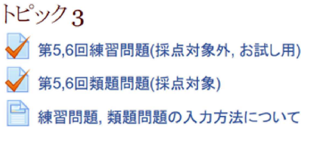


図 1: 微分方程式の問題の公開

1 から 8 までの選択肢がランダムに配置され, 図 2 のような微分方程式の解を選択肢から選んでもらう問題を STACK にて作成した.

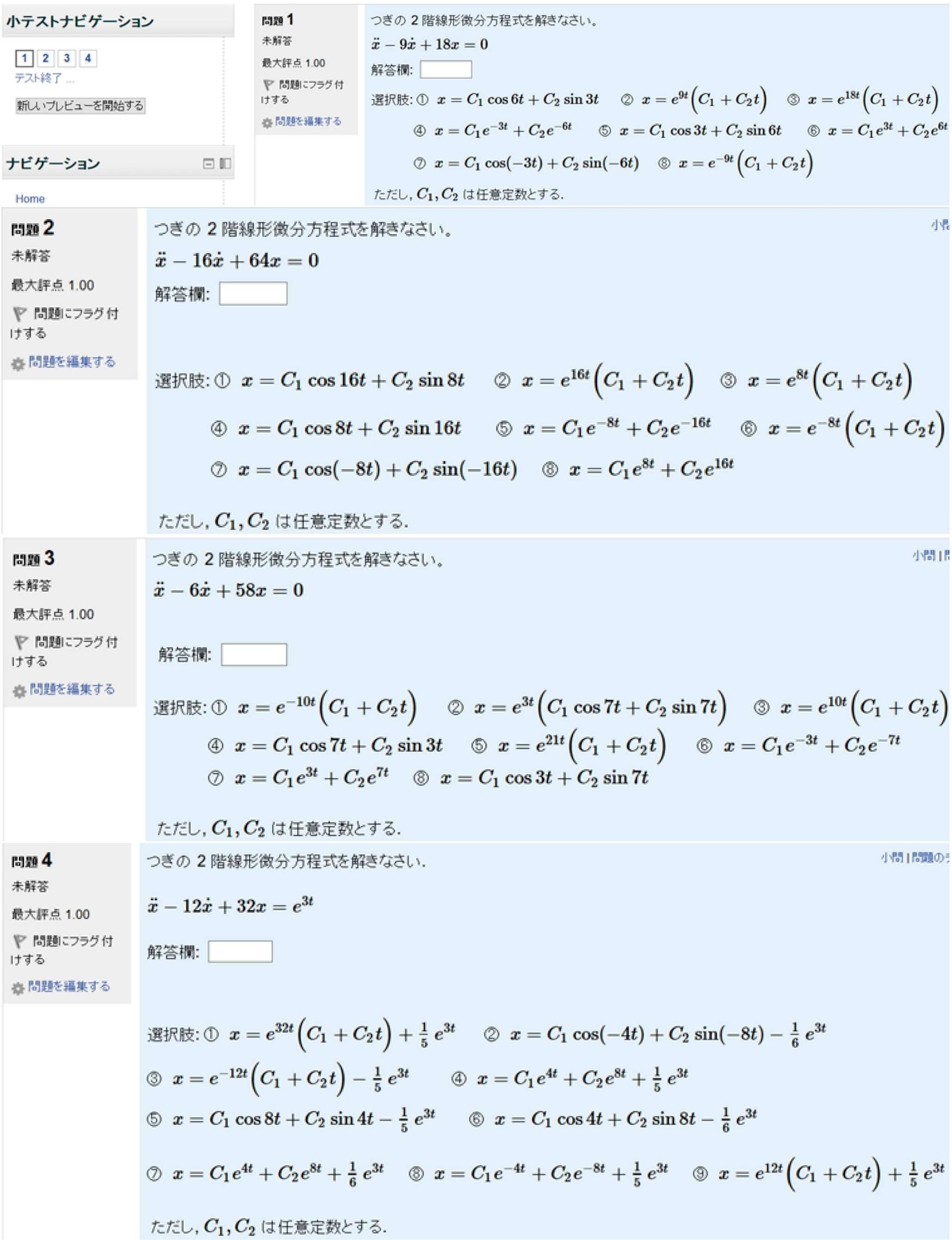
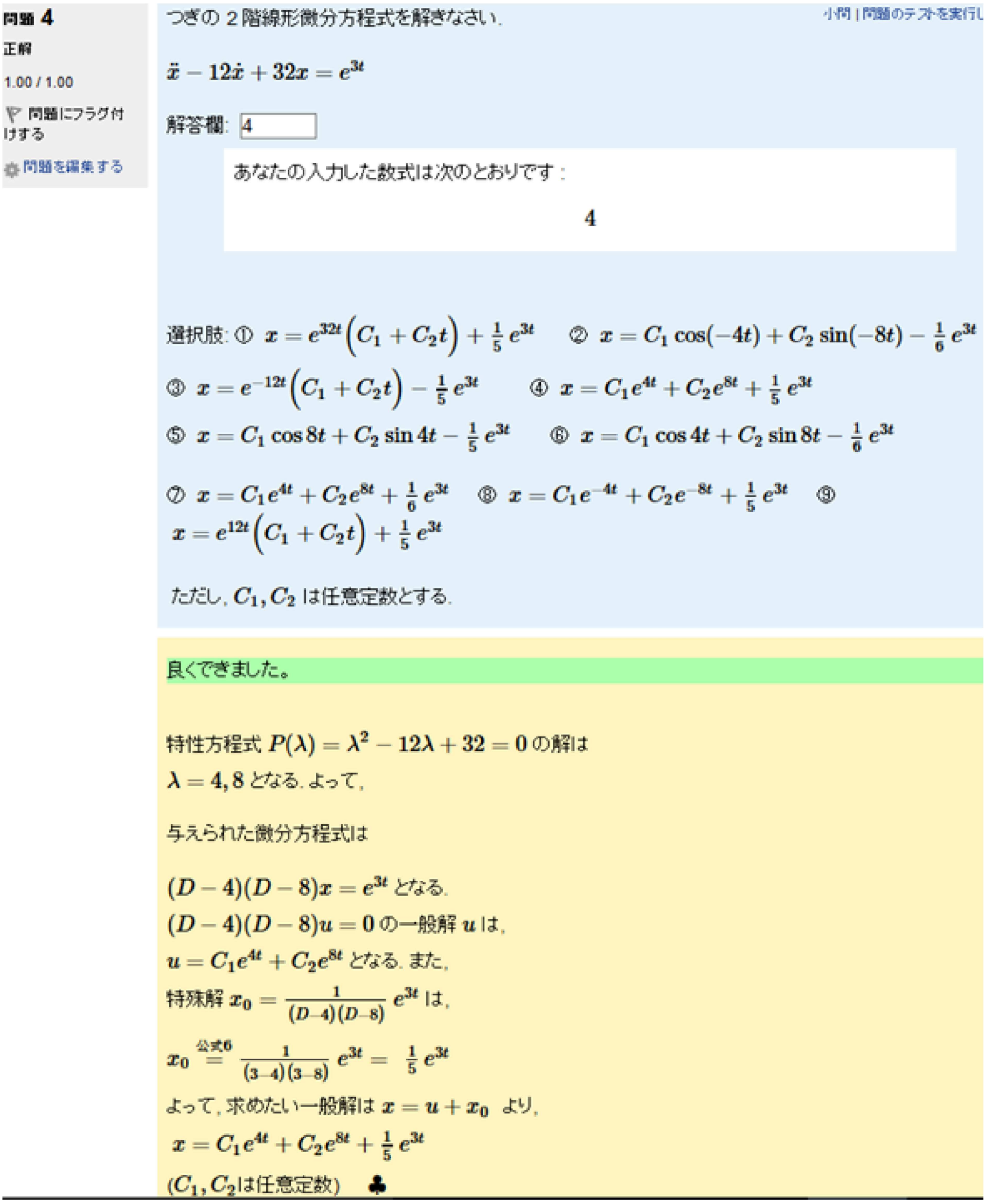


図 2: 微分方程式

学生が問題を解き終えた後は, フィードバックが出力され, 解法についての説明がなされる. 図 3 は, 問題 4 についてのフィードバックである.



問題 4

正解

1.00 / 1.00

問題にフラグ付けする

問題を編集する

小問 | 問題のテストを実行し

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい.

$\ddot{x} - 12\dot{x} + 32x = e^{3t}$

解答欄: 4

あなたの入力した数式は次のとおりです:

4

選択肢: ① $x = e^{32t}\left(C_1 + C_2 t\right) + \frac{1}{5}e^{3t}$ ② $x = C_1\cos(-4t) + C_2\sin(-8t) - \frac{1}{6}e^{3t}$

③ $x = e^{-12t}\left(C_1 + C_2 t\right) - \frac{1}{5}e^{3t}$ ④ $x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

⑤ $x = C_1\cos 8t + C_2\sin 4t - \frac{1}{5}e^{3t}$ ⑥ $x = C_1\cos 4t + C_2\sin 8t - \frac{1}{6}e^{3t}$

⑦ $x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t} + \frac{1}{6}e^{3t}$ ⑧ $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-8t} + \frac{1}{5}e^{3t}$ ⑨ $x = e^{12t}\left(C_1 + C_2 t\right) + \frac{1}{5}e^{3t}$

ただし, C_1, C_2 は任意定数とする.

良くできました。

特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0$ の解は

$\lambda = 4, 8$ となる. よって,

与えられた微分方程式は

$(D-4)(D-8)x = e^{3t}$ となる.

$(D-4)(D-8)u = 0$ の一般解 u は,

$u = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t}$ となる. また,

特殊解 $x_0 = \frac{1}{(D-4)(D-8)}e^{3t}$ は,

$x_0 \overset{\text{公式6}}{=} \frac{1}{(3-4)(3-8)}e^{3t} = \frac{1}{5}e^{3t}$

よって, 求めたい一般解は $x = u + x_0$ より,

$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

(C_1, C_2 は任意定数) ♣

図 3: 微分方程式の問題のフィードバック

図 4 は評価無 (pre) と評価有 (post) の得点分布を表している.

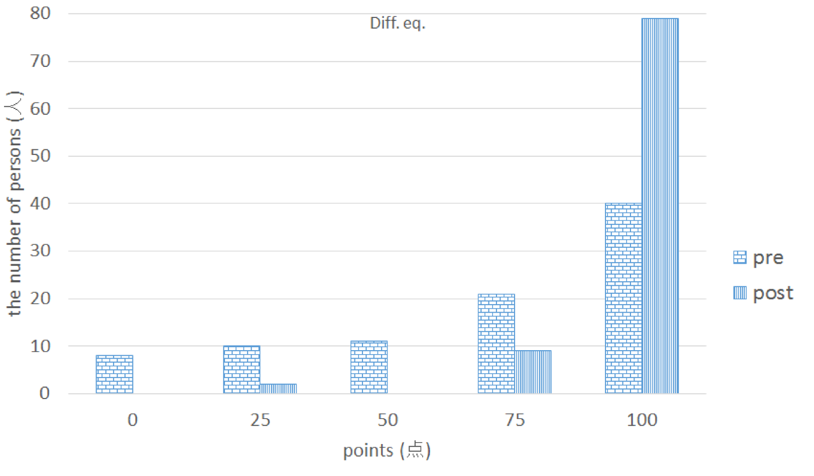


図 4: 微分方程式の問題の成績 1

図 5 は評価無 (pre) と評価有 (post) の得点の同時分布を表している. 例えば, 評価無で 50 点をとり, 評価有で 100 点のものは 8 人いる. 図 5 の右側はバブルチャートを表しており, バブルの面積は人数に比例している.

post (点) \ pre (点)	0	25	50	75	100
100	6	5	8	20	40
75	2	3	3	1	0
50	0	0	0	0	0
25	0	2	0	0	0
0	0	0	0	0	0

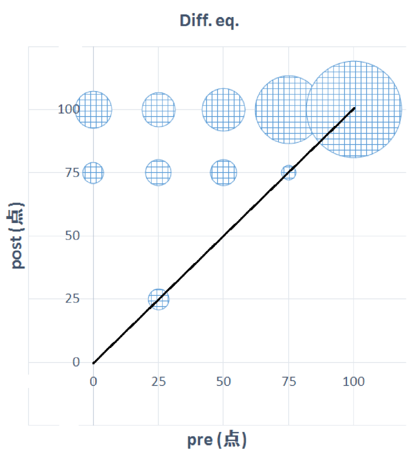


図 5: 微分方程式の問題の成績 2

対角線より上側に分布している. すなわち, 大部分の人の得点が上昇していることがわかる.

3　ガンマ関数とベータ関数

ガンマ関数とベータ関数の問題を STACK にて作成し, 学生に公開した.

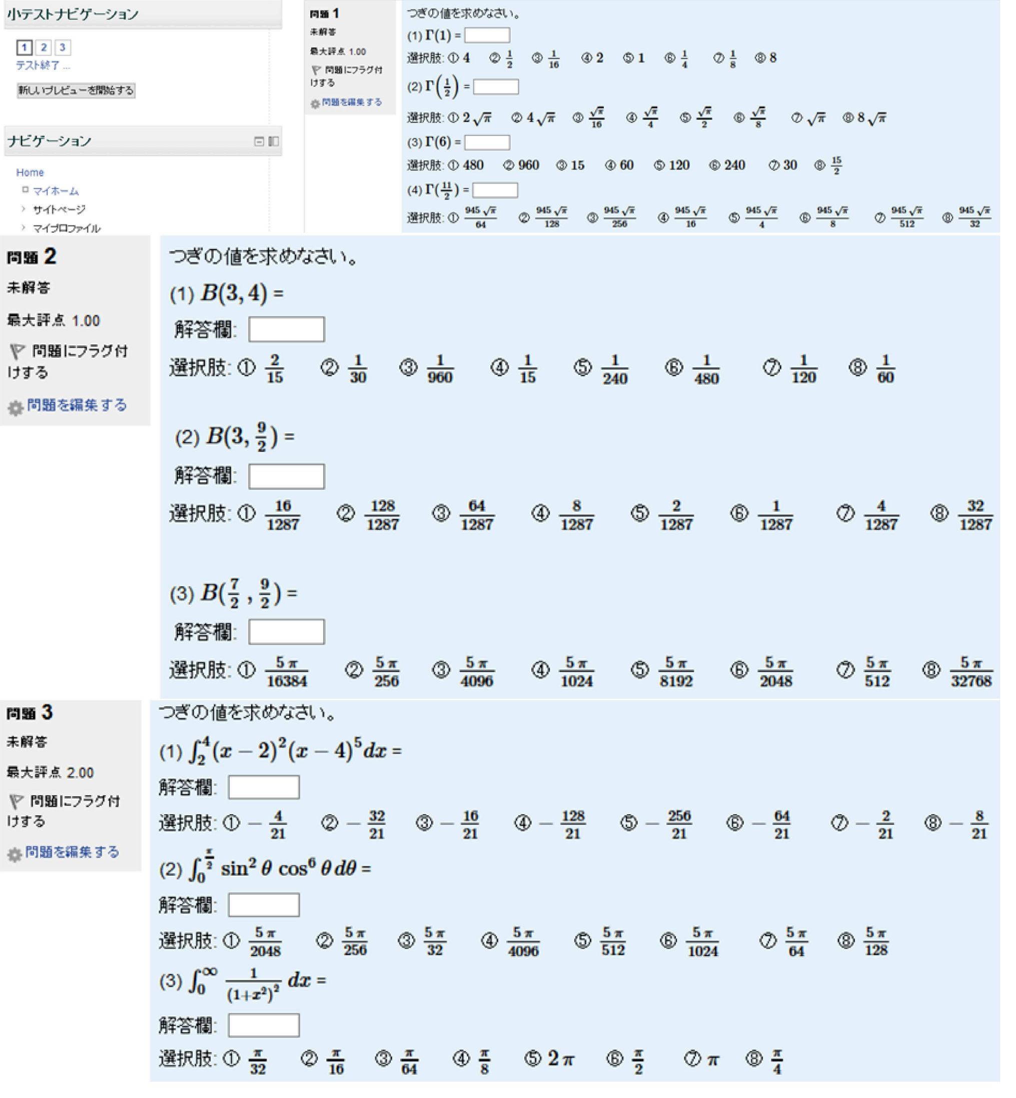


図 6: ガンマ関数とベータ関数

特に, 間違いやすい問題 3 については, 図 7 のようになるべく詳しく解法をフィードバックにて出力されるように配慮した.

問題 3

部分的に正解

1.33 / 2.00

問題にフラグ付けする

問題を編集する

つぎの値を求めなさい。 小問 |

(1) $\int_2^4 (x-2)^2 (x-4)^5 \, dx$ =

解答欄: 2

あなたの入力した数式は次のとおりです：

$$2$$

選択肢: ① $-\frac{4}{21}$ ② $-\frac{32}{21}$ ③ $-\frac{16}{21}$ ④ $-\frac{128}{21}$ ⑤ $-\frac{256}{21}$ ⑥ $-\frac{64}{21}$ ⑦ $-\frac{2}{21}$ ⑧ $-\frac{8}{21}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^6\theta \, d\theta$ =

解答欄: 8

あなたの入力した数式は次のとおりです：

$$8$$

選択肢: ① $\frac{5\pi}{2048}$ ② $\frac{5\pi}{256}$ ③ $\frac{5\pi}{32}$ ④ $\frac{5\pi}{4096}$ ⑤ $\frac{5\pi}{512}$ ⑥ $\frac{5\pi}{1024}$ ⑦ $\frac{5\pi}{64}$ ⑧ $\frac{5\pi}{128}$

(3) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$ =

解答欄: 8

あなたの入力した数式は次のとおりです：

$$8$$

選択肢: ① $\frac{\pi}{32}$ ② $\frac{\pi}{16}$ ③ $\frac{\pi}{64}$ ④ $\frac{\pi}{8}$ ⑤ 2π ⑥ $\frac{\pi}{2}$ ⑦ π ⑧ $\frac{\pi}{4}$

部分的にあっています．

(1) 正解です．

(2) 不正解です．

(3) 正解です．

(1) $t = \frac{x-2}{4-2} = \frac{x-2}{2}$ とおくと，$x:\ 2 \to 4$ のとき $t: 0 \to 1$ で $dt = \frac{1}{2}\,dx$ となる．

$$\begin{aligned}
\int_2^4 (x-2)^2 (x-4)^5 dx &= \int_0^1 (2t)^2 \{2(t-1)\}^5 \cdot 2\,dt \\
&= 2^{2+5} \cdot (-1)^5 \int_0^1 t^2 (1-t)^5 \cdot 2\,dt \\
&= 2^{2+5+1} \cdot (-1)^5 \int_0^1 t^{3-1} (1-t)^{6-1}\,dt \\
&= 2^{2+5+1} \cdot (-1)^5 B(3,6) = -\frac{32}{21} \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^6\theta \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\cdot\frac{2+1}{2}-1}\theta \cos^{2\cdot\frac{6+1}{2}-1}\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} B\left(\frac{2+1}{2}, \frac{6+1}{2}\right) = \frac{5\pi}{256} \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

(3)
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{2\cdot 2-1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \clubsuit$$

図 7: ガンマ関数とベータ関数の問題 3 のフィードバック

図 8 と図 9 は成績を示している．評価無 (pre) より，評価有 (post) の方が軒並み得点が高いことがわかる．

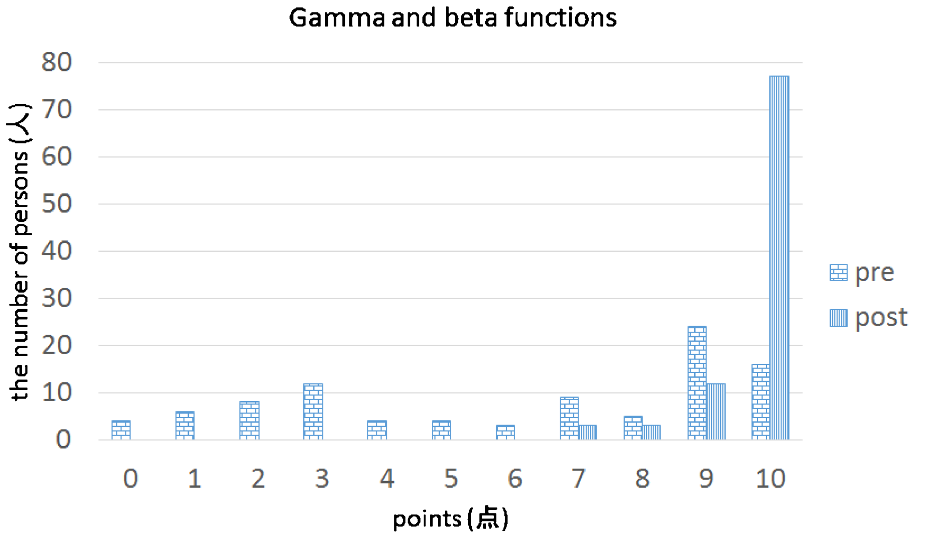


図 8: ガンマ関数とベータ関数の問題の成績 1

post (点)

10	3	4	4	8	4	4	2	6	4	23	15
9	1	2	2	3	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

pre (点)

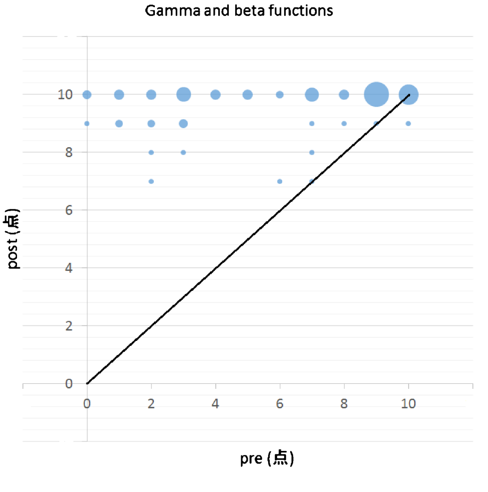
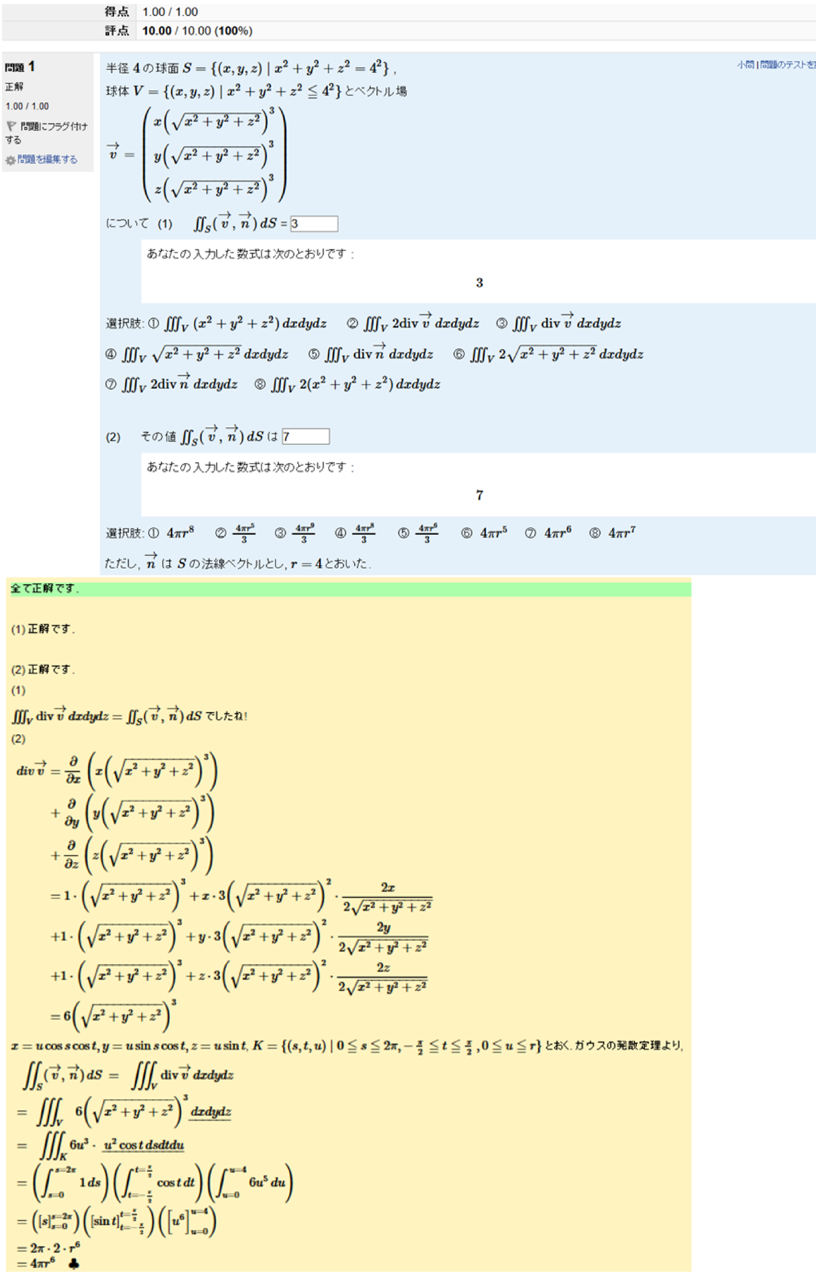


図 9: ガンマ関数とベータ関数の問題の成績 2

4 ガウスの発散定理

図 10 は, ガウスの発散定理の問題を解いた後のフィードバックが出力されている.



得点	1.00 / 1.00
評点	**10.00** / 10.00 (**100%**)

問題 **1**
正解
1.00 / 1.00
問題にフラグ付けする
問題を編集する

小問 | 問題のテストを

半径 4 の球面 $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 4^2\}$,
球体 $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 4^2\}$ とベクトル場

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \\ y\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \\ z\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \end{pmatrix}$$

について (1) $\iint_S (\vec{v}, \vec{n})\, dS =$ 3

あなたの入力した数式は次のとおりです：

3

選択肢: ① $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$ ② $\iiint_V 2\mathrm{div}\,\vec{v}\, dxdydz$ ③ $\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{v}\, dxdydz$
④ $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$ ⑤ $\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{n}\, dxdydz$ ⑥ $\iiint_V 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$
⑦ $\iiint_V 2\mathrm{div}\,\vec{n}\, dxdydz$ ⑧ $\iiint_V 2(x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$

(2) その値 $\iint_S (\vec{v}, \vec{n})\, dS$ は 7

あなたの入力した数式は次のとおりです：

7

選択肢: ① $4\pi r^8$ ② $\frac{4\pi r^5}{3}$ ③ $\frac{4\pi r^9}{3}$ ④ $\frac{4\pi r^8}{3}$ ⑤ $\frac{4\pi r^6}{3}$ ⑥ $4\pi r^5$ ⑦ $4\pi r^6$ ⑧ $4\pi r^7$

ただし, $\vec{n}$ は S の法線ベクトルとし, $r=4$ とおいた.

全て正解です.

(1) 正解です.

(2) 正解です.

(1)

$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{v}\, dxdydz = \iint_S (\vec{v}, \vec{n})\, dS$ でしたね!

(2)

$$\begin{aligned} div\,\vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(z\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3\right) \\ &= 1\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 + x\cdot 3\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &\quad +1\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 + y\cdot 3\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &\quad +1\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 + z\cdot 3\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2\cdot\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= 6\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \end{aligned}$$

$x = u\cos s\cos t, y = u\sin s\cos t, z = u\sin t, K = \{(s,t,u) \mid 0 \leqq s \leqq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}, 0 \leqq u \leqq r\}$ とおく. ガウスの発散定理より,

$$\begin{aligned} &\iint_S (\vec{v}, \vec{n})\, dS = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{v}\, dxdydz \\ &= \iiint_V 6\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \underline{dxdydz} \\ &= \iiint_K 6u^3 \cdot \underline{u^2\cos t\, dsdtdu} \\ &= \left(\int_{s=0}^{s=2\pi} 1\, ds\right)\left(\int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt\right)\left(\int_{u=0}^{u=4} 6u^5\, du\right) \\ &= \left([s]_{s=0}^{s=2\pi}\right)\left([\sin t]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}}\right)\left(\left[u^6\right]_{u=0}^{u=4}\right) \\ &= 2\pi\cdot 2\cdot r^6 \\ &= 4\pi r^6 \ ♣ \end{aligned}$$

図 10: ガウスの発散定理の問題のフィードバック 1

図 11 は, 面積分を用いる別解をフィードバックにて出力している.

(別解) まず,

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
&(\vec{v}, \vec{n}) \\
&= x^2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + y^2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + z^2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^4
\end{aligned}$$

とくに S 上で, r^4 となる.

$$\begin{aligned}
&\iint_S (\vec{v}, \vec{n})\, dS \\
&= \iint_S r^4\, dS \\
&= r^4 \iint_S 1\, dS \\
&= r^4 \times S \text{ の表面積} \\
&= r^4 \cdot 4\pi r^2 \\
&= 4\pi r^6 \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

図 11: ガウスの発散定理の問題のフィードバック 2

図 12 と図 13 は成績を示している. 評価無 (pre) より, 評価有 (post) の方が軒並み得点が高いことがわかる.

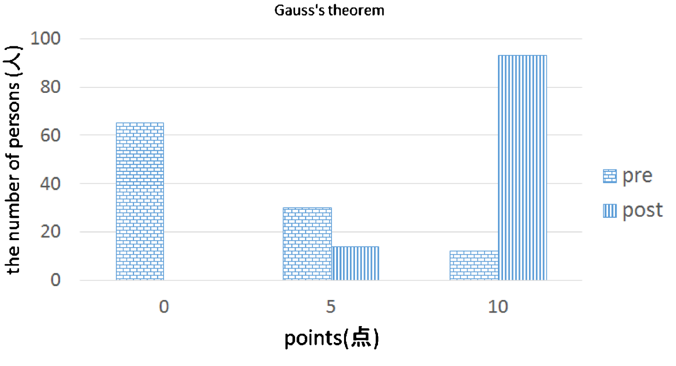


図 12: ガウスの発散定理の問題の成績 1

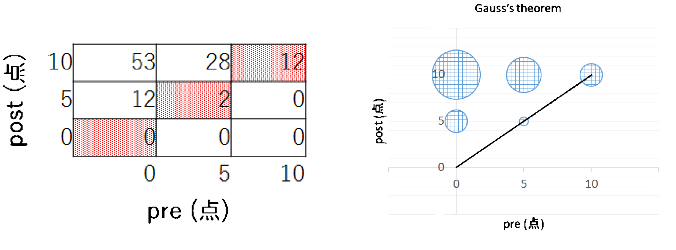


図 13: ガウスの発散定理の問題の成績 2

5 考察

表 1 の N は評価無を受験し, その後さらに評価有を受験した人数を表している. 評価無より評価有の方が軒並み点数が高い. これは, 評価無を受験後, フィードバックを見て間違えた個所を復習し, 再度評価有の問題を受験しているためだと推察される.

問題	対象人数	評価無	評価有
微分方程式 (100 点満点)	$N = 90$	70.8 ±30.4	95.8 ±13.1
ガンマ関数とベータ関数 (10 点満点)	$N = 96$	6.23 ±3.32	9.72 ±0.68
ガウスの発散定理 (10 点満点)	$N = 107$	2.52 ±3.46	9.35 ±1.69

表 1: 各問題の結果 (± は '平均 ± 標準偏差' を表す)

対応のある 2 標本 t 検定 (両側) を行ったところ, 表 2 の結果が得られた. すべての問題において $p < 0.001$ であり, 有意であった. また, 評価有の得点から評価無の得点を引いた差得点を考え, 効果量 $d_D =$ (差得点の平均)/(差得点の標準偏差) を考える ([1], P.66). すべての問題において, $d_D > 0.8$ であった. かなり詳細な解答が出力されるフィードバック付の STACK の問題は, ある程度解法パターンが決まっている数学の問題に対して, 学習効果があると推察される. ただし, 標準偏差 として $\sqrt{(\text{偏差平方和})/(N-1)}$ を用いた.

問題	p 値	差得点の平均 (95%CI)	効果量
微分方程式 (100 点満点)	$p < 0.001$	25.0 $[18.5, 31.5]$	$d_D =$ 0.81
ガンマ関数とベータ関数 (10 点満点)	$p < 0.001$	3.49 $[2.84, 4.14]$	$d_D =$ 1.08
ガウスの発散定理 (10 点満点)	$p < 0.001$	6.82 $[6.15, 7.50]$	$d_D =$ 1.93

表 2: 各問題の p 値と効果量

謝辞

本研究は，京都大学数理解析研究所共同事業「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」による成果である．本研究は JSPS 科研費 16H03067, 26282033,15K01091 の助成を受けている．

参考文献

[1] 大久保街亜, 岡田謙介 伝えるための心理統計, 勁草書房, 2015, 第 1 版第 6 刷.